Inspectoratul Şcolar al Judeţului Satu Mare

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - faza locală
23 ianuarie 2010
Clasa a-VII-a

I. Fie $A=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+...+\frac{\sqrt{2010}-\sqrt{2009}}{\sqrt{2010\cdot 2009}}$

(4p) a) Demonstraţi că $A\in(0;1)$

(3p) b) Aflaţi partea întreagă a numărului $\sqrt{2010}\cdot A$

(prof.Baciu Nicolae – inspector şcolar de specialitate I.S.J., Satu Mare)

II. Fie $a,b,c\in\mathbb{Q}_{+}^{*}$ astfel încât $\frac{a+2b}{2a+3b+4c}=\frac{b+2c}{2b+3c+4a}=\frac{c+2a}{2c+3a+4b}$. Arătaţi că

(4p) a) $\sqrt{\frac{a+2b}{2a+3b+4c}+\frac{b+2c}{2b+3c+4a}+\frac{c+2a}{2c+3a+4b}}\in\mathbb{N}$

(3p) b) $\sqrt{\frac{\sqrt{2ab}}{2a+3b+4c}+\frac{\sqrt{2bc}}{2b+3c+4a}+\frac{\sqrt{2ca}}{2c+3a+4b}}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

(prof. Bud Adrian -Liceul Teoretic Negreşti Oaş)

III. Fie triunghiul isoscel ABC, AB = AC, cu $m(\sphericalangle A)>90^{\circ}$. Se prelungeşte segmentul [AC] cu un segment [CD] astfel încât AC = CD, iar segmentul [BC] se prelungeşte cu un segment [CE] astfel ca BC = CE. Mediatoarea segmentului [AD] intersectează pe BA în F. Pe această mediatoare se ia un punct T astfel încât CF = CT.

a) Să se arate că punctele T, D şi E sunt coliniare
b) Poate fi patrulerul BFET pătrat ?
c) În cazul când $DF\perp BE$, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC
d) Arătaţi că patrulaterul ATDF este romb.

(prof.Chiorean Vasile – Şc. nr. 2 Carei)

IV. Se consideră trapezul isoscel ABCD, AB || CD, cu AD = BC = DC = 12 cm şi măsura unghiului A este de 60°. Fie MN linia mijlocie a trapezului ($M\in AD$) care se intersectează cu diagonalele în P şi Q, $P\in[AC]$.

a) Arătaţi că semidreapta (AC este bisectoarea unghiului A
b) Calculaţi lungimea segmentului [PQ]
c) Demonstraţi că triunghiul DEQ este echilateral, unde $DE\perp AB$, $E\in AB$
d) Demonstraţi că $DP\perp EQ$

(prof.Culic Camelia – Şc. cu cls. I-VIII L.Blaga, Satu Mare)

Nota: Timp de lucru 3 ore
Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.